ÜBER

EINE CLASSE VON ABEL'SCHEN GLEICHUNGEN

VON

DR. B. IGEL,

DOCENT AN DER K. K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 16. MÄRZ 1882.

Beim Studium der Abel'schen Gleichungen, welche durch die Eigenschaft charakterisirt sind, dass, wenn man ihre Wurzeln mit $z_1, z_2 \ldots z_\mu$ bezeichnet und $\mu = n.m$ ist, unter diesen folgender Zusammenhang stattfindet:

$$\begin{array}{lll} z_2 = \Theta(z_1) & , \; z_3 = \Theta(z_2) & \ldots z_n = \Theta(z_{n-1}) \\ z_{n+2} = \Theta(z_{n+1}) & , \; z_{n+3} = \Theta(z_{n+2}) & \ldots z_{2n} = \Theta(z_{2n-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{(m-1)n+2} = \Theta(z_{(m-1)n+1}) & , \; z_{(m-1)n+3} = \Theta(z_{(m-1)n+2}) & \ldots z_{nm} = \Theta(z_{mn-1}), \end{array}$$

vermisst man das Kriterium, vermittelst dessen man an einer gegebenen Gleichung beurtheilen könnte, ob sie die genannte Eigenschaft hat oder nicht. Man ist daher geneigt anzunehmen, dass es ausser den von Abel behandelten und den mit den binomischen Gleichungen zusammenhängenden keine solchen Gleichungen mehr gibt, und dies umsomehr, als man solche Gleichungen nicht bilden kann und auf sie nirgends geführt wird. In noch viel höherem Grade scheint dies der Fall zu sein bei einer anderen Classe von Gleichungen, deren sämmtliche Wurzeln rational durch eine von ihnen ausgedrückt werden sollen, und zwar so, dass, wenn

$$\Theta(z) \text{ und } \Theta_1(z)$$

zwei Wurzeln derselben sind, die Beziehung bestehen solle

$$\Theta\Theta_1(z) = \Theta_1\Theta(z).$$

Es gewinnt daher an Interesse, wenn man auf einen Fall geführt wird, in welchem Gleichungen mit den genannten Eigenschaften auftreten, und in welchem die wahre Natur der Gleichungen hervortritt. Die Behandlung eines solchen Falles ist nun der Gegenstand des folgenden Aufsatzes.

§. 1.

Es seien, unter n eine gerade Zahl verstanden, drei ganze rationale Functionen

$$f_1(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$
$$f_2(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n$$
$$f_3(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1} x + c_n$$

ohne gemeinschaftlichen Theiler gegeben. Wir setzen für die Folge fest, dass die Wurzeln der Gleichungen

$$f_1 = 0 \quad f_2 = 0 \quad f_3 = 0$$

bezüglich durch folgende Buchstaben bezeichnet werden:

$$a,\ b,\ c, \ldots i$$
$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{i}$$
$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots \iota.$$

Stellen wir uns nun die Aufgabe, diejenigen Werthe von λ zu bestimmen, für welche die beiden Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) + \lambda f_3(x) = 0 \end{cases}$$

zugleich bestehen, so finden wir, indem wir x aus diesen Gleichungen eliminiren, eine Gleichung in λ

$$2)\quad R(f_1, f_2 + \lambda f_3) = 0,$$

wo wir unter diesem Symbole die Resultante der Gleichungen 1) vorstellen. Da die Gleichung 2) offenbar vom $n$ten Grade in λ ist, so erhalten wir n Werthe von λ und demgemäss die n Gleichungen:

$$3)\quad \begin{cases} f_2(x) + \lambda_1 f_3(x) = 0 \\ f_2(x) + \lambda_2 f_3(x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_2(x) + \lambda_n f_3(x) = 0, \end{cases}$$

von denen jede eine gemeinschaftliche Wurzel mit $f_1 = 0$ hat.

Da ferner die Wurzeln der Gleichung 2), resp. den folgenden Verhältnissen gleich sind

$$4)\quad \begin{cases} \lambda_1 = f_2(a) : f_3(a) \\ \lambda_2 = f_2(b) : f_3(b) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n = f_2(i) : f_3(i), \end{cases}$$

so kann die Gleichung 2) als diejenige Gleichung aufgefasst werden, deren Wurzeln rationale Functionen der Wurzeln der Gleichung $f_1 = 0$ sind. Setzt man in den Gleichungen 3) die λ-Werthe aus 4) ein, so dass sie die Form annehmen:

$$5)\quad \begin{cases} f_2(x) f_3(a) - f_2(a) f_3(x) = 0 \\ f_2(x) f_3(b) - f_2(b) f_3(x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_2(x) f_3(i) - f_2(i) f_3(x) = 0, \end{cases}$$

so hat jede dieser Gleichungen nebst der mit $f_1 = 0$ gemeinschaftlichen Wurzel noch $n-1$ Wurzeln, von denen eine jede eine Function jener Wurzel ist. Es entsprechen demnach jeder Wurzel von $f_1 = 0$ $n-1$ Werthe, die mit ihr durch eine Gleichung verknüpft sind. Dass sich jene Wurzel rational durch jede der mit ihr durch eine Gleichung verknüpften Wurzeln ausdrücken lassen müsse, ist klar, und ich werde nachher zeigen, wie dies geschieht. Vorerst soll die Frage erörtert werden, welche algebraische Bedingungen erfüllt werden müssen, wenn die Relation

$$\frac{f_3(a)}{f_2(a)} = \frac{f_2(b)}{f_3(b)}$$

statt haben soll. Es ist offenbar die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass die Gleichung 2) zwei zusammenfallende Wurzeln hat. Die Anzahl der Gleichungen 3) reducirt sich in diesem Falle auf $n-1$, von denen eine Gleichung ein rationales λ enthält. Diese ist also eine rationale ganze Function und hat mit ${}^1f = 0$ zwei gemeinschaftliche Wurzeln. In diesem Falle muss $f_1(x)$ nothwendig reducibel sein. Wenn man

aber $f_1(x)$ als irreducibel voraussetzt, so muss man im Falle zweier zusammenfallenden Wurzeln der Gleichung 2) nothwendig schliessen, dass diese mindestens noch ein Paar zusammenfallender Wurzeln haben müsse, dass also die Relationen stattfinden:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{f_2(a)}{f_3(a)} &= \frac{f_2(b)}{f_3(b)}\\ \frac{f_3(c)}{f_3(c)} &= \frac{f_2(d)}{f_3(d)}.\end{aligned}\right.$$

Ich will nun zeigen, dass unter dieser Voraussetzung die Gleichung 2) $\frac{n}{2}$ Paare zusammenfallender Wurzeln habe, und zwar in folgender Weise. Es lässt sich bekanntlich jede rationale Function einer Wurzel von irgend einer Gleichung als ganze Function derselben Wurzel vom Grade $n-1$ darstellen. Sei diese Function mit Φ bezeichnet, so wird unter der erwähnten Voraussetzung die Gleichung bestehen

$$\Phi(a) - \Phi(b) = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung x statt a, so erhält man eine Gleichung, die eine Wurzel mit der Gleichung

$$\frac{f_1(x)}{x-b} = 0$$

gemeinschaftlich hat und durch Elimination von x aus diesen Gleichungen eine Gleichung

$$a = \Theta(b),$$

wo Θ eine rationale Function ist. Da man ebenso x aus den Gleichungen

$$\frac{f_1(x)}{x-a} = 0$$

$$\Phi(x) - \Phi(a) = 0$$

eliminiren kann, so erhält man auf dieselbe Weise

$$b = \Theta(a).$$

Wir lernen demnach daraus, dass im Falle

$$\frac{f_2(a)}{f_3(a)} = \frac{f_2(b)}{f_3(b)}$$

oder, was dasselbe ist, im Falle zweier zusammenfallenden Wurzeln der Gleichung 2) die Wurzeln a und b in der Beziehung zu einander stehen, dass die eine rational durch die andere ausdrückbar ist. Wenn nun f_1 als irreducibel vorausgesetzt wird, so schliesst man nach Abel, dass die Wurzeln von $f_1 = 0$ sich so in Paare gruppiren, dass eine Wurzel jedes Paares eine rationale Function der anderen Wurzel desselben Paares ist. Die Auflösung der Gleichung $f_1 = 0$ reducirt sich also auf die Lösung der Gleichung 2) vom Grade $\frac{n}{2}$ und auf die der $\frac{n}{2}$ quadratischen Gleichungen. Dieses Resultat werden wir kurz so aussprechen:

Satz.

Wenn $f_1(x)$ irreducibel ist und wenn es möglich ist, zwei ganze Functionen f_2 und f_3 so zu bestimmen, dass

$$\frac{f_2(a)}{f_3(a)} = \frac{f_2(b)}{f_3(b)}$$

ist, so ist die Gleichung $f_1 = 0$ eine Abel'sche, d. h. sie hat die Form

$$f_1(x) = (x-a)(x-\Theta(a))(x-b)(x-\Theta(b))\ldots(x-c)(x-\Theta(c)) = 0.$$

Um nun die oben angedeutete Rechnung durchzuführen, erinnern wir daran, dass Φ folgende Form hat:

$$\Phi = \frac{f_2(a)}{R(f_1 f_3)} \cdot R\left\{\frac{f_1}{x-a}, f_3\right\} = \frac{f_2(a)}{R(f_1 f_3)} \begin{vmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 \cdots \varphi_{n-1} & & \\ & 1 & \varphi_1 \cdots \varphi_{n-2} & \varphi_{n-1} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & \varphi_1 \cdots \varphi_{n-1} \\ 1 & c_1 & c_2 \cdots\cdots & c_n & \\ & 1 & c_1 \cdots\cdots & c_n & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & c_1 \cdots c_n \end{vmatrix}$$

wobei man sich natürlich zu denken hat, dass man in dieser Form den Grad mit Hilfe der Gleichung $f_1 = 0$ auf $n-1$ herabgedrückt habe. Beachtet man, dass die φ_i folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a + a_1 \\ \varphi_2 &= a^2 + a_1 a + a_2 \\ \varphi_3 &= a^3 + a_1 a^2 + a_2 a + a_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{n-1} &= a^{n-1} + a_1 a^{n-2} + a_2 a^{n-3} + + + a_n, \end{aligned}$$

so kann man, indem man in der Determinante die zweite Reihe mit a multiplicirt und von der ersten Reihe abzieht, die dritte Reihe mit a multiplicirt und von der zweiten abzieht u. s. w., die Determinante auf folgende Form bringen.

$$R\left\{\frac{f_1}{x-a}, f_3\right\} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \cdots a_n & & & \\ & 1 & a_1 \cdots a_{n-1} & a_n & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 1 & a_1 \cdots\cdots a_n & & \\ & & & 1 & \varphi_1 & \varphi_2 \cdots \varphi_{n-1} \\ 1 & c_1 & c_2 \cdots c_n & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 1 & c_1 & c_2 \cdots\cdots c_n & \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man die $(n-1)$te Reihe dieser Determinante mit $f_2(a)$, reducirt den Grad in a mit Hilfe der Gleichung $f_1 = 0$ und ordnet dieselbe nach Potenzen von a, so erhält Φ folgende Form:

$$\Phi(a) = \frac{1}{R(f_1 f_3)} \{\Sigma A_\iota R_\iota \cdot a^{n-1} + \Sigma B_\iota R_\iota \cdot a^{n-2} + + \Sigma N_\iota R_\iota\},$$

wo R_i die Unterdeterminanten bedeuten. Die Resultante der Gleichungen

$$\frac{f_1(x)}{x-b} = 0$$

$$\Phi(x) - \Phi(b) = 0$$

hat demnach die Form

$$R = \begin{vmatrix} \Sigma A_\iota R_\iota, & \Sigma B_\iota R_\iota, \ldots (\Sigma N_\iota R_\iota - \Phi(b)) & & \\ & \Sigma A_\iota R_\iota \cdots\cdots\cdots\cdots & (\Sigma N_\iota R_\iota - \Phi(b)) & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varphi_1 \cdots\cdots \varphi_{n-1} & & \\ & 1 \cdots\cdots \varphi_{n-2} & \varphi_{n-1} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

§. 2.

Die Gleichungen 1), 2) und 3) im vorigen Abschnitte lassen sich geometrisch interpretiren.[1] Bekanntlich lässt sich jede Curve vom Geschlechte $p=0$, d. h. jede Curve mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppel- und Rückkehrpunkten durch eindeutige Transformation auf die Form

$$1) \quad \begin{cases} x_1 = f_1(\lambda\mu) \\ x_2 = f_2(\lambda\mu) \\ x_3 = f_3(\lambda\mu) \end{cases}$$

bringen, wo f_1, f_2, f_3 ganze homogene Functionen $n$ter Ordnung von λ und μ sind. Dass umgekehrt die Curve 1) vom Geschlechte $p=0$ ist, kann man folgendermassen leicht einsehen. Sehen wir nämlich λ, μ, ν als Coordinaten eines Punktes der transformirten Curve an, so können wir die x als Functionen von λ, μ und ν betrachten, bei welchen $\nu=0$ ist; es ist also dieses die Gleichung der transformirten Curve, d. h. dieselbe ist eine Gerade, bei welcher $p=0$ ist. Da nun die eindeutige Transformation das Geschlecht der Curve nicht ändert, so folgt daraus, dass die Curve 1) vom Geschlechte $p=0$ ist. Die Gleichung der Curve 1) erhält man bekanntlich durch Elimination von λ, μ aus dem Systeme

$$u_1 f_1 + u_2 f_2 + u_3 f_3 = 0$$
$$v_1 f_1 + v_2 f_2 + v_3 f_3 = 0.$$

Diese Resultante enthält die Grössen u, v nur in den Verbindungen

$$u_2 v_3 - u_3 v_2$$
$$u_3 v_1 - u_1 v_3$$
$$u_1 v_2 - u_2 v_1$$

und ist eine Form $n$ten Grades der letztern. Ersetzt man dieselben durch f_1, f_2, f_3, so entsteht die Gleichung $n$ten Grades

$$F(f_1 f_2 f_3) = 0,$$

welche die Gleichung der Curve ist. — Die Resultante 2) in §. 1 wird offenbar auch aus den Gleichungen

$$u_1 f_1 \qquad\qquad = 0$$
$$v_1 f_1 + v_2 f_2 + v_3 f_3 = 0$$

erhalten, daraus folgt, dass sie auch aus der Resultante $F(f_1 f_2 f_3) = 0$ erhalten wird, wenn man in ihr $f_1 = 0$ setzt.

Der Ausdruck, den man erhält, wenn man in der Gleichung einer Curve eine trimetrische Coordinate gleich Null setzt, stellt bekanntlich die Verbindungslinien der dieser Coordinate gegenüberliegenden Ecke des Fundamentaldreiecks mit den Punkten, in denen diese Coordinate die Curve schneidet, dar; und da die Resultante 2) in §. 1 der restliche Ausdruck von $F(f_1 f_2 f_3)$ ist, wenn man in dieser $f_1 = 0$ setzt, so stellt sie eben die Verbindungslinien des Punktes $f_2 = 0, f_3 = 0$ mit den Punkten, in welchen $F(f_1 f_2 f_3) = 0$ die Seite $f_1 = 0$ schneidet. Setzt man in der Resultante 2) in §. 1 $\lambda = f_2 : f_3$, so besteht sie offenbar aus den Producten der Gleichungen 3) in §. 1, folglich stellt jede dieser Gleichungen eine solche Verbindungslinie dar. Nun ist bekannt, dass für einen Doppelpunkt der Curve $F(f_1 f_2 f_3) = 0$ die Gleichungen bestehen:

$$f_1(\lambda) = k f_1(\lambda')$$
$$f_2(\lambda) = k f_2(\lambda')$$
$$f_3(\lambda) = k f_3(\lambda'),$$

[1] Man vergl. Salmon, Geometrie der höheren ebenen Curven, p. 35; ferner Clebsch, Über diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind. Crelle's Journal, Bd. 63 und Theorie der Abel'schen Functionen von Clebsch und Gordan, p. 67.

folglich bedeuten die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1(a) &= kf_1(b) \\ f_2(a) &= kf_2(b) \\ f_3(a) &= kf_3(b), \end{aligned}$$

dass ein Doppelpunkt der Curve auf der Seite $x_1 = 0$ liegt. Der Satz in §. 1 kann jetzt folgendermassen ausgesprochen werden:

Satz.

Wenn $f_1(\lambda)$ irreducibel ist und ein Doppelpunkt der Curve auf der Seite $x_1 = 0$ liegt, so sind alle Durchschnittspunkte dieser Seite mit der Curve Doppelpunkte.

Bildet man die Resultante

$$R\{f_2\,,\, f_1 + \lambda f_3\} = 0$$

von den Gleichungen

$$\begin{aligned} f_2(x) \qquad\quad &= 0 \\ f_1(x) + \lambda f_3(x) &= 0, \end{aligned}$$

so kann man fragen, ob es möglich sei, dass sie ebenfalls ein vollständiges Quadrat ist, wenn $R\{f_1, f_2 + \lambda f_3\}$ ein solches ist. Vom algebraischen Standpunkte betrachtet, könnte es möglich scheinen, während die geometrische Anschauung darauf führt, dass es wenigstens für $n = 4$ im Allgemeinen unmöglich ist, weil, da die Curve vierter Ordnung nur drei Doppelpunkte haben kann, es nicht möglich ist, dass auf der Seite $x_2 = 0$ noch zwei Doppelpunkte liegen. Wir wollen es nun auch algebraisch zeigen. Gesetzt, die beiden Resultanten wären vollständige Quadrate, so würden folgende Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} f_2(a)f_3(b) - f_2(b)f_3(a) &= 0 \\ f_2(c)f_3(d) - f_2(d)f_3(c) &= 0 \\ f_2(e)f_3(f) - f_2(f)f_3(e) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f_1(\mathfrak{a})f_3(\mathfrak{b}) - f_1(\mathfrak{b})f_3(\mathfrak{a}) &= 0 \\ f_1(\mathfrak{c})f_3(\mathfrak{d}) - f_1(\mathfrak{d})f_3(\mathfrak{c}) &= 0 \\ f_1(\mathfrak{g})f_3(\mathfrak{h}) - f_1(\mathfrak{h})f_3(\mathfrak{g}) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

oder, wenn man die Gleichungen nach den Coëfficienten von f_3 entwickelt, die folgenden:

$$\begin{aligned} c_0\{f_2(a)b^n - f_2(b)a^n\} + c_1\{f_2(a)b^{n-1} - f_2(b)a^{n-1}\} + \cdots + c_n\{f_2(a) - f_2(b)\} &= 0 \\ c_0\{f_2(c)d^n - f_2(d)c^n\} + c_1\{f_2(c)d^{n-1} - f_2(d)c^{n-1}\} + \cdots + c_n\{f_2(c) - f_2(d)\} &= 0 \\ c_0\{f_2(e)f^n - f_2(f)e^n\} + c_1\{f_2(e)f^{n-1} - f_2(f)e^{n-1}\} + \cdots + c_n\{f_2(e) - f_2(f)\} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ c_0\{f_1(\mathfrak{a})\mathfrak{b}^n - f_1(\mathfrak{b})\mathfrak{a}^n\} + c_1\{f_1(\mathfrak{a})\mathfrak{b}^{n-1} - f_1(\mathfrak{b})\mathfrak{a}^{n-1}\} + \cdots + c_n\{f_1(\mathfrak{a}) - f_1(\mathfrak{b})\} &= 0 \\ c_0\{f_1(\mathfrak{c})\mathfrak{d}^n - f_1(\mathfrak{d})\mathfrak{c}^n\} + c_1\{f_1(\mathfrak{c})\mathfrak{d}^{n-1} - f_1(\mathfrak{d})\mathfrak{c}^{n-1}\} + \cdots + c_n\{f_1(\mathfrak{c}) - f_1(\mathfrak{d})\} &= 0, \end{aligned}$$

d. h. man würde dann im Allgemeinen eine hinreichende Anzahl von Gleichungen haben, um die Coëfficienten von f_3 zu bestimmen, durch die Wurzeln von f_1 und f_2, so dass f_3 eine ganz bestimmte, im Allgemeinen nicht rationale Function sein wird.

§. 3.

Der soeben gegebene Beweis wird illusorisch, wenn das System von Gleichungen nicht von einander unabhängig ist. In einem solchen Falle könnten möglicherweise alle drei Resultanten

$$R\{f_1, f_2 + \lambda f_3\}\,, \quad R\{f_2, f_1 + \lambda f_3\}\,, \quad R\{f_3, f_1 + \lambda f_2\}$$

vollständige Quadrate sein. In der That tritt ein solcher Fall ein, wenn verschiedenen Werthen von $\lambda:\mu$ nicht verschiedene Punkte der Curve $F(f_1 f_2 f_3)=0$ entsprechen, sondern zu jedem Punkte der Curve mehrere Werthe jenes Verhältnisses gehören. Dieser Fall [1] wird bekanntlich dadurch charakterisirt, dass die Gleichungen

$$f_1(\lambda\mu)f_2(\lambda'\mu')-f_1(\lambda'\mu')f_2(\lambda\mu)=0$$
$$f_1(\lambda\mu)f_3(\lambda'\mu')-f_1(\lambda'\mu')f_3(\lambda\mu)=0$$
$$f_2(\lambda\mu)f_3(\lambda'\mu')-f_2(\lambda'\mu')f_3(\lambda\mu)=0$$

den grössten gemeinschaftlichen Divisor $\psi(\lambda\mu,\ \lambda'\mu')$ haben. Das Gleichungssystem in §. 2 sagt in diesem Falle nichts Neues und ist eine Folge dieser drei Gleichungen, welche für alle $\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$ bestehen, die durch die Gleichung $\psi(\lambda\mu,\ \lambda'\mu')=0$ verknüpft sind. Nun ist aber bekannt, dass sich stets eine rationale Function von $\lambda:\mu$ so herstellen lasse, dass deren Werthe und die Punkte der Curve sich gegenseitig eindeutig entsprechen. Nehmen wir nun an, dass diese Function der Quotient $u:v$ sei, wo u und v zwei Functionen πten Grades von $\lambda:\mu$ bedeuten, so lassen sich die Coordinaten des zum Werthpaare $\lambda:\mu$ gehörigen Curvenpunktes als Formen φ, ψ, χ, etwa ρten Grades von uv darstellen, und es wird

$$\varphi(uv)=kf_1$$
$$\psi(uv)=kf_2$$
$$\chi(uv)=kf_3$$

wo k von $\lambda\mu$ unabhängig ist. Durch Elimination von uv aus dem Systeme

$$f_1:f_2:f_3=\varphi(uv):\psi(uv):\chi(uv)$$

erhält man eine Gleichung ρten Grades

$$G(f_1 f_2 f_3)=0. \quad (\pi.\rho=n).$$

Von dieser Form G beweist Pasch [2], dass sie irreducibel ist und dass $G(f_1 f_2 f_3)^\pi = F(f_1 f_2 f_3)$, wenn $\pi>1$ ist.

Da wir nun schon wissen, dass die drei Resultanten

$$R\{f_1\,,\,f_2+\lambda f_3\}\,,\quad R\{f_2\,,\,f_1+\lambda f_3\}\,,\quad R\{f_3\,,\,f_1+\lambda f_2\}$$

aus der Form $F(f_1 f_2 f_3)$ entstehen, wenn in derselben resp. f_1, f_2 und f_3 gleich Null setzt, so folgt daraus, dass, wenn π gleich zwei ist, alle drei Resultanten vollständige Quadrate sind. Es bestehen demnach folgende Gleichungssysteme

$$\begin{cases} f_2(a)=k_1 f_3(b) \\ f_2(c)=k_1 f_3(d) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_2(h)=k_1 f_3(i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(\mathfrak{a})=k_2 f_3(\mathfrak{b}) \\ f_1(\mathfrak{c})=k_2 f_3(\mathfrak{d}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_1(\mathfrak{h})=k_2 f_3(\mathfrak{i}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(\alpha)=k_3 f_2(\beta) \\ f_1(\gamma)=k_3 f_2(\delta) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_1(\eta)=k_3 f_2(\iota) \end{cases}$$

---

[1] Vergl. Lüroth, Mathematische Annalen, Bd. IX, p. 163, und Pasch, ebendas. Bd. XVI, p. 91.

[2] L. c.

Dies bedeutet nach §. 1 nichts Anderes, als dass die Wurzeln jeder der drei Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ in $\frac{n}{2}$ Paare sich so vertheilen lassen, dass die Wurzel eines jeden Paares sich rational durch die andere desselben Paares ausdrücken lässt. Wir können demnach folgenden Satz aussprechen:

Satz.

Wenn die Functionen $f_1 f_2 f_3$ in dem Zusammenhange stehen, dass die Gleichungen

$$f_1(\lambda\mu) f_2(\lambda'\mu') - f_1(\lambda'\mu') f_2(\lambda\mu) = 0$$
$$f_1(\lambda\mu) f_3(\lambda'\mu') - f_1(\lambda'\mu') f_3(\lambda\mu) = 0$$
$$f_2(\lambda\mu) f_3(\lambda'\mu') - f_2(\lambda'\mu') f_3(\lambda\mu) = 0$$

den grössten gemeinschaftlichen Divisor $\psi(\lambda\mu;\ \lambda'\mu')$ vom zweiten Grade haben, so sind die Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ Abel'sche, d. h. es ist

$$f_1(x) = (x - \xi_1)(x - \Theta(\xi_1)) \ldots (x - \xi_n)(x - \Theta(\xi_n))$$
$$f_2(x) = (x - \xi_1')(x - \Theta(\xi_1')) \ldots (x - \xi_n')(x - \Theta(\xi_n'))$$
$$f_3(x) = (x - \xi_1'')(x - \Theta(\xi_1'')) \ldots (x - \xi_n'')(x - \Theta(\xi_n'')).$$

Bemerkenswerth ist dieser Fall noch dadurch, dass die rationale Function $\Theta(\xi)$ für alle drei Gleichungen dieselbe ist. Erinnert man sich an die Bildung von $\Theta(\xi)$, so folgt leicht folgende Relation:

$$R\left\{\frac{f_1}{x-\lambda},\ f_2 R\left(f_3,\ \frac{f_1}{x-\lambda}\right)\right\} = R\left\{\frac{f_2}{x-\lambda},\ f_1 R\left(f_3,\ \frac{f_2}{x-\lambda}\right)\right\}$$
$$= R\left\{\frac{f_3}{x-\lambda},\ f_1 R\left(f_2,\ \frac{f_3}{x-\lambda}\right)\right\}$$

wo λ eine unbestimmte Grösse bedeutet.

§. 4.

Es sollen jetzt folgende Sätze bewiesen werden:

Satz 1.

Sind die drei Gleichungen

$$f_1 = 0,\quad f_2 = 0,\quad f_3 = 0$$

von der im Satze §. 3 auseinandergesetzten Beschaffenheit, so lassen sich die Wurzeln einer jeden von ihnen rational durch die Wurzel einer jeden anderen ausdrücken.

Satz 2.

Unter derselben Voraussetzung lassen sich die Wurzeln jeder Gleichung durch irgend eine derselben als rationale Functionen ausdrücken, und zwar in der Weise, dass, wenn man irgend zwei solche rationale Functionen mit Θ und Θ_1 bezeichnet, die Relation besteht:

$$\Theta\,\Theta_1 = \Theta_1\,\Theta.$$

Es bestehen nämlich in diesem Falle folgende Gleichungen:

$$0 = c_0\{f_2(\xi)\,\xi'^n - f_2(\xi')\,\xi^n\} + c_1\{f_2(\xi)\,\xi'^{n-1} - f_2(\xi')\,\xi^{n-1}\} + \cdots + c_n\{f_2(\xi) - f_2(\xi')\}$$
$$0 = c_0\{f_2(a)\,b^n - f_2(b)\,a^n\} + c_1\{f_2(a)\,b^{n-1} - f_2(b)\,a^{n-1}\} + \cdots + c_n\{f_2(a) - f_2(b)\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = c_0\{f_2(h)\,i^n - f_2(i)\,h^n\} + c_1\{f_2(h)\,i^{n-1} - f_2(i)\,h^{n-1}\} + \cdots + c_n\{f_2(h) - f_2(i)\}$$
$$0 = c_0\{f_1(\mathfrak{a})\,\mathfrak{b}^n - f_1(\mathfrak{b})\,\mathfrak{a}^n\} + c_1\{f_1(\mathfrak{a})\,\mathfrak{b}^{n-1} - f_1(\mathfrak{b})\,\mathfrak{a}^{n-1}\} + \cdots + c_n\{f_1(\mathfrak{b}) - f_1(\mathfrak{a})\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = c_0\{f_1(\mathfrak{h})\,\mathfrak{i}^n - f_1(\mathfrak{i})\,\mathfrak{h}^n\} + c_1\{f_1(\mathfrak{h})\,\mathfrak{i}^{n-1} - f_1(\mathfrak{i})\,\mathfrak{h}^{n-1}\} + \cdots + c_n\{f_1(\mathfrak{h}) - f_1(\mathfrak{i})\}$$

welche von einander abhängig sind und schon aus der ersten folgen. Es verschwindet also folgende Determinante:

$$\pi = \begin{vmatrix} f_2(\xi)\xi'^n - f_2(\xi')\xi^n, & f_2(\xi)\xi'^{n-1} - f_2(\xi')\xi^{n-1} & \ldots & f_2(\xi) - f_2(\xi') \\ f_2(a)b^n - f_2(b)a^n, & f_2(a)b^{n-1} - f_2(b)a^{n-1} & \ldots & f_2(a) - f_2(b) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_2(h)i^n - f_2(i)h^n, & f_2(h)i^{n-1} - f_2(i)h^{n-1} & \ldots & f_2(h) - f_2(i) \\ f_1(\mathfrak{a})\mathfrak{b}^n - f_1(\mathfrak{b})\mathfrak{a}^n, & f_1(\mathfrak{a})\mathfrak{b}^{n-1} - f_1(\mathfrak{b})\mathfrak{a}^{n-1} & \ldots & f_1(\mathfrak{a}) - f_1(\mathfrak{b}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(\mathfrak{h})\mathfrak{i}^n - f_1(\mathfrak{i})\mathfrak{h}^n, & f_1(\mathfrak{h})\mathfrak{i}^{n-1} - f_1(\mathfrak{i})\mathfrak{h}^{n-1} & \ldots & f_1(\mathfrak{h}) - f_1(\mathfrak{i}) \end{vmatrix}$$

Ist aber ξ beliebig, so ist es auch ξ', da diese beiden Grössen nur durch die Gleichung $\psi(\xi\,\xi') = 0$ zusammenhängen; es müssen also die Coëfficienten der Elemente der ersten Reihe für sich verschwinden, d. h. die $n+1$ Unterdeterminanten müssen verschwinden. Wenn wir nun statt der Grössen

$$\begin{matrix} a, \; c \ldots i \; ; & \mathfrak{a}, \; \mathfrak{c} \ldots \mathfrak{i} \\ b, \; d \ldots h \; ; & \mathfrak{b}, \; \mathfrak{d} \ldots \mathfrak{h} \end{matrix}$$

resp. die Grössen

$$\begin{matrix} \xi_1, \; \xi_2 \ldots \xi_{\frac{n}{2}} \; ; \; \xi_{\frac{n}{2}+1} \ldots \xi_n \\ \Theta(\xi_1), \; \Theta(\xi_2) \ldots \Theta\left(\xi_{\frac{n}{2}}\right) \; ; \ldots \Theta(\xi_n) \end{matrix}$$

einführen und nach den ξ_i entwickeln, so erhalten wir $n+1$ Gleichungen zwischen n Unbekannten

$$\begin{aligned} &\pi_1 \;\; (\xi_1, \; \xi_2 \ldots \xi_n) = 0 \\ &\pi_2 \;\; (\xi_1, \; \xi_2 \ldots \xi_n) = 0 \\ &\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ &\pi_n \;\; (\xi_1, \; \xi_2 \ldots \xi_n) = 0 \\ &\pi_{n+1}(\xi_1, \; \xi_2 \ldots \xi_n) = 0. \end{aligned}$$

Jeder Combination von n Gleichungen aus diesem Systeme genügt das Werthsystem

$$a, b, c \ldots i \; ; \; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots \mathfrak{i}.$$

Aus irgend einer solchen Combination eliminiren wir die $n-1$ Grössen $\xi_2\,\xi_3 \ldots \xi_n$ und erhalten die Endgleichung

$$f(\xi_1) = 0.$$

Da nun dieser Gleichung die Grösse a genügt, so erhält man bekanntlich die übrigen Grössen in der Form

$$\text{I} \quad \begin{cases} c = \Theta_1(a), \; e = \Theta_2(a) \ldots h = \Theta_{\frac{n}{2}}(a) \\ \mathfrak{a} = \Theta_{\frac{n}{2}+1}(a), \ldots \ldots \ldots \mathfrak{h} = \Theta_n(a). \end{cases}$$

Damit ist nun der erste Satz bewiesen, nach welchem jede Wurzel einer Gleichung durch diejenige einer jeden anderen rational ausdrückbar ist.

Setzen wir aber in $\pi = 0$ statt der Grössen

$$\begin{matrix} a, \; c \ldots i, \; \mathfrak{a}, \; \mathfrak{c} \ldots \mathfrak{i} \\ b, \; d \ldots h, \; \mathfrak{b}, \; \mathfrak{d} \ldots \mathfrak{h} \end{matrix}$$

die Grössen

$$\begin{matrix} \Theta(\xi_1), \; \Theta(\xi_2) \ldots \Theta(\xi_n) \\ \xi_1, \quad \xi_2 \; \ldots \; \xi_n \end{matrix}$$

und eliminiren aus denselben die $n-1$ Grössen

$$\xi_2, \; \xi_3 \ldots \xi_n,$$

so erhalten wir dieselbe Endgleichung

$$f(\xi_1)=0,$$

welcher die Wurzel b genügt. Wir erhalten jetzt

$$\text{II)}\quad \begin{cases} d=\Theta_1(b)\ldots\ldots h=\Theta_{\frac{n}{2}}(b)\\ \mathfrak{d}=\Theta_{\frac{n}{2}+1}(b)\ldots\mathfrak{h}=\Theta_n(b).\end{cases}$$

Vergleicht man die Gleichungen I) und II) mit einander, so erhält man leicht die Gleichungen

$$\Theta(e)=\Theta\,\Theta_1(a)$$
$$\Theta(e)=\Theta_1\Theta(a)$$

oder

$$\Theta\Theta_1(a)=\Theta_1\Theta(a)$$

und somit ist auch der zweite Satz bewiesen.

§. 5.

Wir haben schon oben angedeutet, dass die Resultante

$$R\{f_1, f_2+\lambda f_3\}$$

in das Product

$$(f_2+\lambda_1 f_3)(f_2+\lambda_2 f_3)\ldots(f_2+\lambda_n f_3)$$

übergeht, wenn man in ihr $\lambda=f_2:f_3$ setzt. Und da jeder der Factoren einen linearen Factor von $f_1(x)$ enthält, so muss

$$R\{f_1, f_2+\lambda f_3\}$$

die Form haben:

$$R\{f_1, f_2+\lambda f_3\}=\psi(x).f_1(x).$$

Es handelt jetzt darum, die Form ψ zu eruiren. Zu diesem Zwecke führe ich folgende Bezeichnungen ein:

$$f_1(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\,+\,+\,+a_nx^n=A^x$$
$$f_2(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\,+\,+\,+b_nx^n=B^x$$
$$f_3(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\,+\,+\,+c_nx^n=C^x$$
$$f_1(y)=a_0+a_1y+a_2y^2+\,+\,+\,+a_ny^n=A^y$$
$$f_2(y)=b_0+b_1y+b_2y^2+\,+\,+\,+b_ny^n=B^y$$
$$f_3(y)=c_0+c_1y+c_2y^2+\,+\,+\,+c_ny^n=C^y,$$

so dass die Gleichungen 3) §. 1 folgende Form haben:

$$\begin{vmatrix} B^x & C^x\\ B^a & C^a\end{vmatrix}=0\quad \begin{vmatrix} B^x & C^x\\ B^b & C^b\end{vmatrix}=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\begin{vmatrix} B^x & C^x\\ B^h & C^h\end{vmatrix}=0\quad \begin{vmatrix} B^x & C^x\\ B^i & C^i\end{vmatrix}=0.$$

Wie man leicht einsieht, hat ψ die Form:

$$\psi=\begin{vmatrix} B^x & C^x\\ B^a & C^a\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} B^x & C^x\\ B^b & C^b\end{vmatrix}\ldots\begin{vmatrix} B^x & C^x\\ B^i & C^i\end{vmatrix}\frac{1}{(x-a)(x-b)\ldots(x-i)}$$

oder auch, wie eine leichte Umformung zeigt:

$$\psi=\begin{vmatrix} B^x & \frac{B^a-B^x}{a-x}\\ C^x & \frac{C^a-C^x}{a-x}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} B^x & \frac{B^b-B^x}{b-x}\\ C^x & \frac{C^b-C^x}{b-x}\end{vmatrix}\cdots\begin{vmatrix} B^x & \frac{B^i-B^x}{i-x}\\ C^x & \frac{C^i-C^x}{i-x}\end{vmatrix}.$$

Setzt man nun

$$\chi = \begin{vmatrix} B^x \dfrac{B^y - B^x}{y - x} \\ C^x \dfrac{C^y - C^x}{y - x} \end{vmatrix},$$

so sieht man, dass ψ aus χ entsteht, indem man in χ für y successive alle Wurzeln von $f_1 = 0$ setzt und die Resultate mit einander multiplicirt, d. h., dass ψ die Resultante von $f_1(y)$ und χ ist. Nun ist, wenn man χ entwickelt,

$$\chi = (B_{00}\, C_{1n}) + (B_{01}\, C_{2n})\, y + (B_{02}\, C_{3n})\, y^2 + + (B_{0,\, n-1}\, C_{nm})\, y^{n-1},$$

wo

$$B_{ik} = b_i + b_{i+1}\, x + + + b_k\, x^{i-k}$$

$$C_{ik} = c_i + c_{i+1}\, x + + + c_k\, x^{i-k}$$

und

$$(B_{ik} C_{nm}) = B_{ik}\, C_{nm} - B_{nm} C_{ik};$$

folglich ist

$$\Psi = \begin{vmatrix} a_0\, a_1 \quad \ldots a_n & & & \\ \quad a_0\, a_1 \ldots a_{n-1}\, a_n & & & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ \qquad\qquad a_0\, a_1 \ldots a_n & & & \\ (B_{00}\, C_{1n}),\ (B_{01}\, C_{2n}) \ldots (B_{0n-1}\, C_{nm}) & & & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ \qquad\qquad (B_{00}\quad C_{1n}) \ldots (B_{0n-1},\ C_{nm}) & & & \end{vmatrix}.$$

$\psi = 0$ gibt nun die Werthe von x, die zusammen mit den Wurzeln von $f_1(y) = 0$ die Werthepaare liefern, für welche $\chi = 0$ wird, und wir erhalten die Wurzeln von $f_1 = 0$ als rationale Functionen der Wurzeln der Gleichungen 3) in §. 1 ausgedrückt.

§. 6.

Die in §. 1 behandelte Frage ist ein specieller Fall folgender allgemeinen Aufgabe:

„Wenn eine Gleichung $m$ten Grades $f_1(x) = 0$ gegeben ist, deren Wurzeln durch $x_1, x_2 \ldots x_m$ bezeichnet werden, so soll man eine solche Gleichung $F(u) = 0$ bilden, dass jede Wurzel u derselben durch eine gegebene rationale Function $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_\mu)$ von μ Wurzeln der vorgelegten Gleichung ausgedrückt werde."

Diese Aufgabe wird bekanntlich einfach dadurch gelöst, dass man das Product

$$(\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2) \ldots (\varphi - \varphi_N)$$

entwickelt, so dass man die Gleichung erhält:

$$P = \varphi^N + P_1 \varphi^{N-1} + P_2 \varphi^{N-2} + + + P_N = 0,$$

wo $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_N$ die N Werthe, welche φ durch die verschiedenen Vertauschungen der Wurzeln der gegebenen Gleichung annehmen kann, bedeuten und

$$-P_1 = \varphi_1 \quad + \varphi_2 \quad + + + \varphi_N$$

$$P_2 = \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_3 + + + \varphi_{N-1} \varphi_N$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$(-1)^N P_N = \varphi_1 \varphi_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi_N$$

gesetzt ist. In unserem Falle ist $N = m$, d. h. die rationale Function φ hängt nur von einer Wurzel der vorgelegten Gleichung ab. Es handelt jetzt darum, die Relationen zu entwickeln, welche aus der Vergleichung der Coëfficienten der adäquaten Gleichungen

$$R(f_1, f_2 + \lambda f_3) = 0$$
$$P = 0$$

entspringen. Bezeichnen wir mit

$$R\left(\tbinom{f_2}{f_1 f_3}\right), \; R\left(\tbinom{f_2^2}{f_1 f_3}\right) \ldots R\left(\tbinom{f_2^k}{f_1 f_3}\right)$$

die Resultante $R_{(f_1 f_3)}$, nachdem man in ihr resp. eine Reihe, zwei Reihen oder k Reihen der Coëfficienten von f_3 durch die Coëfficienten von f_2 ersetzt hat, so ist der zweite Coëfficient von

$$R(f_1, f_2 + \lambda f_3)$$
$$P_1 = \Sigma R\left(\tbinom{f_2}{f_1 f_3}\right) : R(f_1 f_3),$$

wo die Summe sich auf alle Reihen der Resultante aus den Elementen von f_3 bezieht, so dass P_1 eine Summe von m Determinanten von je $2m$ter Ordnung ist. Derselbe Coëfficient in der Gleichung $P = 0$ ist

$$P_1 = \frac{\Sigma f_2(a)}{R(f_1 f_3)} \begin{vmatrix} a_0 \; a_1 \ldots a_n & & \\ \quad a_0 \ldots a_{n-1} \; a_n & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & 1 \;\; \varphi_1 \; \varphi_2 \ldots \varphi_{n-1} & \\ c_0 \; c_1 \ldots c_n & & \\ \quad c_0 \ldots c_{n-1} \; c_n & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & c_0 \;\; c_1 \;\; \ldots c_n & \end{vmatrix}$$

oder, nachdem man diesen Ausdruck mit Hilfe von $f_1 = 0$ reducirt hat,

$$P_1 = \frac{1}{R(f_1 f_3)} \Sigma \{A_\iota R_\iota . a^{n-1} + B_\iota R_\iota . a^{n-2} + + N_\iota R_\iota\},$$

wo die Summe sich auf alle Wurzeln von $f_1 = 0$ erstrecken. Wir erhalten daher die Relation

$$\Sigma R\left(\tbinom{f_2}{f_1 f_3}\right) = \Sigma\Sigma \{A_\iota R_\iota a^{n-1} + B_\iota R_\iota a^{n-2} + + N_\iota R_\iota\}$$
$$= \Sigma\Sigma R_\iota \{A_\iota a^{n-1} + B_\iota a^{n-2} + + N_\iota\} . —$$

Da nun ferner der letzte Coëfficient in $R_{(f_1, f_2 + \lambda f_3)} = 0$

$$P_n = \frac{R(f_1 f_2)}{R(f_1 f_3)}$$

und derselbe Coëfficient in $P = 0$

$$P_n = \frac{1}{R^n(f_1 f_3)} \Pi f_2(a) \begin{vmatrix} a_0 \; a_1 \ldots a_n & & \\ \quad a_0 \ldots a_{n-1} \; a_n & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & 1 \;\; \varphi_1 \; \varphi_2 \ldots \varphi_{n-1} & \\ c_0 \; c_1 \ldots c_n & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & c_0 \;\; c_1 \ldots\ldots c_n & \end{vmatrix}$$

ist, so folgt

$$\frac{R(f_1 f_2)}{R(f_1 f_3)} = \frac{\Pi f_2(a)}{R(f_1 f_3)^n} \begin{vmatrix} a_0 \; a_1 \ldots a_n & & \\ \quad a_0 \ldots a_{n-1} \; a_n & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & 1 \;\; \varphi_1 \ldots \varphi_{n-1} & \\ c_0 \; c_1 \ldots c_n & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & c_0 \;\; c_1 \ldots\ldots c_n & \end{vmatrix}.$$

Da nun $\Pi f_2(a) = R_{(f_1 f_2)}$, so folgt

$$R^{n-1}_{(f_1 f_2)} = \Pi \begin{vmatrix} a_0\, a_1 \ldots a_n & & & \\ & a_0 \ldots a_{n-1}\, a_n & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 1\;\; \varphi_1 \ldots \varphi_{n-1} & \\ c_0\, c_1 \ldots c_n & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & c_0 \ldots\ldots c_n & \end{vmatrix} = \Pi \Phi.$$

Betrachten wir $\Phi(x)$ als eine Function $(n-1)$ten Grades, so ist $\Pi\Phi(a)$ die Resultante von Φ und f_1, und da dieselbe die $(n-1)$te Potenz von $R_{f(_1 f_2)}$ ist, so folgt, dass, wenn f_1 und f_3 eine gemeinschaftliche Wurzel haben, f_1 und Φ $n-1$ gemeinschaftliche Wurzeln haben. Φ wird also in diesem Falle gleich

$$\frac{f_1}{x-\sigma},$$

wo σ eine Wurzel von $f_1 = 0$ bedeutet, welche $\Phi = 0$ nicht genügt. Wir haben also den Satz:

Satz.

Wenn $f_1 = 0$ und $f_3 = 0$ eine gemeinschaftliche Wurzel haben, so stellt sich

$$\frac{f_1}{x-\sigma} = \sigma^{n-1} + \varphi_1\,\sigma^{n-2} + \varphi_2\,\sigma^{n-3} + \cdots + \varphi_{n-1}$$

in Form einer Determinante Φ dar.

